

Title	A Valuation of Callable and Puttable Bonds under the Two-Factor Generalized Ho-Lee model for Interest Rate and Credit Risks (Mathematical Model under Uncertainty and Related Topics)
Author(s)	落合, 夏海; 大西, 匡光
Citation	数理解析研究所講究録 (2015), 1939: 125-132
Issue Date	2015-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/223767
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

A Valuation of Callable and Puttable Bonds under the Two-Factor Generalized Ho-Lee model for Interest Rate and Credit Risks

† 大阪大学大学院・経済学研究科 落合 夏海†, 大西 匡光†‡

Natsumi Ochiai and Masamitsu Ohnishi

Graduate School of Economics, Osaka University

‡ 金融・保険教育研究センター

Center for the Study of Finance and Insurance, Osaka University

1 はじめに

本稿の目的は、金利リスクと信用リスクを考慮して、債券を原資産とする金利デリバティブの無裁定価格評価を行うことである。一般に、「信用リスク」とは、取引相手の経営の悪化や倒産を原因とする契約不履行によって、保有する債券の元本や利息が回収できなくなるリスク、より広い意味では、一国の政情不安や財政悪化などによって、資金の回収ができなくなるリスクである。2007 年以降の世界的な金融不安、また収益の源泉としてリスクをとらなければならない金融機関にとってのリスク・マネジメントの観点からも、信用リスクを考慮することの重要性は高まっている。そこで、本稿では、離散時間の金利の期間構造モデルである一般化 Ho-Lee モデル ([6]) を信用リスクモデルへと拡張した統合モデル ([7]) を使って、金利リスクと信用リスクを加味した割引因子をモデル化する。

本稿で対象とする金利デリバティブは、債券の発行者と保有者の両者に対し、オプションとして満期以前のコール条項、プット条項をそれぞれ与えるような債券、いわゆる、ゲーム・オプション債である。コーラブル債の場合、一般に、金利の下落や債券の発行体の信用力が改善すれば、より低い利回りとなるので、債券の発行者はオプションを行使して、借り換えを行う動機をもつ。一方、プッタブル債の場合、金利が上昇すれば、より高い利回りでの運用が可能となるので、債券の保有者はオプションを行使して、他の投資機会へ乗り換えを行う動機をもち、また、保有する債券の信用力が悪化すれば、債務不履行のリスクを考慮し、債券の保有者は早期にオプションを行使して、債券の発行者に買戻しを要求するという誘因をもつ。このように、債券に付与されたコール条項・プット条項は、金利と信用リスクに関するオプションと考えられ、これらのリスクを考慮した価格評価が必要とされる。

本稿では、金利リスクと信用リスクを加味したうえで、ゲーム・オプション債の価格評価問題を、リスク中立確率測度下での格子上の確率ゲームとして定式化する。動的計画法の最適性の原理にしたがって、債券の満期からバックワードに問題を解けば、ゲーム・オプション債の無裁定価格は全体ゲームの値として求められ、債券の発行者と保有者の合理的な早期行使戦略と早期行使領域はゲームの鞍点均衡戦略として導出されることを示す。また、数値計算によって、金利変動と信用リスク変動に起因する債券価格変動のリスクを評価するために、キー・レート・デュレーション、クレジット・キー・レート・デュレーション等を求め、通常のクーボ

ン債、コーラブル債、プッタブル債との比較も行う。

2 2ファクター・一般化 Ho-Lee モデル

本節では、金利リスクと信用リスクを統合した、2ファクター・一般化 Ho-Lee モデルの概要を説明する。このモデルは、金利変動に対する一般化 Ho-Lee モデルの拡張である。一般化 Ho-Lee モデルは、無裁定条件をみたす離散時間の金利期間構造モデルである。タイム・ステップ数を $T = 0, 1, 2, \dots, N$ (ただし、 N は債券の満期時刻) とすると、一般に、金利の期間構造はスポット・イールド・カーブ $r(T)$ を使ってあらわされ、割引関数 $P(T)$ とは以下の関係:

$$P(T) = \exp(-r(T)T) \quad (1)$$

によって対応付けられる。ここで、債券の信用リスクをあらわすために、債券の発行体が T 期間生存する確率として生存関数 $S(T)$ を考える。このとき、生存関数 $S(T)$ と割引関数 $P(T)$ は、ともに、

- $T = 0$ で 1 の値をとる
- 金利とデフォルト率が正のとき、2つの関数は T に関して単調減少する

という共通の性質をもつ。これより、金利モデルの手法を信用リスクモデルへ拡張すれば、期間 T まで生存している債券のデフォルト率をあらわすハザード・カーブ $h(T)$ は、

$$S(T) = \exp(-h(T)T) \quad (2)$$

によって定義される。この式ハザード・カーブ $h(T)$ は (1) 式のイールド・カーブ $r(T)$ に対応し、債券の信用リスクの期間構造をあらわす。

2ファクター・一般化 Ho-Lee モデルでは、信用リスクと金利リスクの確率変動は、それぞれを 1 ファクター・モデルとして、2項格子構造を使って表現される。各ノード上での 1 期間ボラティリティ・ファクターは、

$$\delta^h(n, i; 1) = \exp\left(-2\sigma^h(n) \min(h(n, i; 1), H) \Delta t^{3/2}\right) \quad (3)$$

$$\delta^r(n, j; 1) = \exp\left(-2\sigma^r(n) \min(r(n, j; 1), R) \Delta t^{3/2}\right) \quad (4)$$

で定義される。ここで、記号の説明をする。上付き添え字 h と r は、これ以降、それぞれハザードレートと金利のファクターであることを示すものとする。 $\delta^h(n, i; 1)$ は、時刻 n 、ハザードレートの状態 i における 1 期間ボラティリティ、 $\delta^r(n, j; 1)$ は、時刻 n 、金利の状態 j における 1 期間ボラティリティ、 $\sigma^h(n)$ と $\sigma^r(n)$ は、ハザードレート・ボラティリティと金利ボラティリティの期間構造をあらわす関数、 $h(n, i; 1)$ と $r(n, j; 1)$ は、各ノード上での 1 期間ハザードレートと 1 期間金利、 H と R は、ハザードレートと金利の閾値率、 Δt は 1 期間間隔をあらわしている。

各ノード上での T 期間のボラティリティ・ファクターは、それぞれ

$$\delta^h(n, i; T) = \delta^h(n, i; 1) \delta^h(n+1, i; T-1) \left(\frac{1 + \delta^h(n+1, i+1; T-1)}{1 + \delta^h(n+1, i; T-1)} \right) \quad (5)$$

$$\delta^r(n, j; T) = \delta^r(n, j; 1) \delta^r(n+1, j; T-1) \left(\frac{1 + \delta^r(n+1, j+1; T-1)}{1 + \delta^r(n+1, j; T-1)} \right) \quad (6)$$

として定義され、上式は 2ファクター・一般化 Ho-Lee モデルの無裁定条件を与える。

(3)–(6) 式によって、ボラティリティ・ファクターが計算されると、各ノード上での 1 期間生存関数 $S(n, i; 1)$ と 1 期間割引関数 $P(n, j; 1)$ は、それぞれ

$$S(n, i; 1) = \frac{S(0, 0; n)}{S(0, 0; n-1)} \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 + \delta^h(k-1, 0; n-k)}{1 + \delta^h(k-1, 0; n-k+1)} \right) \prod_{k=0}^{i-1} \delta^h(n-1, k; 1) \quad (7)$$

$$P(n, j; 1) = \frac{P(0, 0; n+1)}{P(0, 0; n)} \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 + \delta^r(k-1, 0; n-k)}{1 + \delta^r(k-1, 0; n-k+1)} \right) \prod_{k=0}^{j-1} \delta^r(n-1, k; 1) \quad (8)$$

で与えられる。ここで、(7) 式の第 1 項： $\frac{S(0, 0; n)}{S(0, 0; n-1)}$ は、発行体が $n-1$ 期間まで生存しているという条件のもとで、つぎの 1 期間 $[n-1, n]$ に生存することの追加的な確率をあらわしている。

これら (3)–(8) 式を再帰的に計算することによって、全てのノード上での 1 期間生存関数と割引関数が得られる。以上より、各ノード上での金利と信用リスクを統合した 1 期間 2 ファクター・一般化 Ho-Lee モデルは、2つの 1 ファクター・モデルを結合させ、

$$d(n, i, j; 1) = S(n, i; 1) \times P(n, j; 1) \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (9)$$

として与えられる。

3 確率ゲーム

3.1 ゲーム・オプション債

一般に、コーラブル債とは、債券の発行者に対して、満期前に予め定められた価格（コール価格）で債券を買い戻す権利を与えるものである。もし発行者がその権利を行使すれば、彼らは債券の保有者からコール価格で当該債券を買い戻すことができ、債券の保有者は発行者側の要求に応じる義務を持つ。一方、プッタブル債とは、債券の保有者に対して、債券の発行者に予め定められた価格（プット価格）で満期前に早期の買い戻しを要求する権利を与える債券である。もし債券の保有者が権利を行使すれば、発行者側はその要求に応じる義務を持つので、プット価格で当該債券を買い戻さなければならない。

本稿では、債券の保有者と発行者の両者に対し、早期行使に関する条項が付与される債券を考える。この債券を、ゲーム・オプション債と呼ぶことにする。

当該債券に関わる時刻列を、タイム・ステップ数 $n = 0, 1, 2, \dots, N$ によってあらわす。ここで、 $n = 0$ は債券の初期時刻、 $n = 1, 2, \dots, N-1$ は債券のクーポン払い時刻、 $n = N$ は債券の満期時刻とする。債券の保有者と発行者は、ある時刻以降のクーポン払い時刻 $n \in \{n^*, n^* + 1, \dots, N-1\}$ で権利行使できると仮定する。ただし、 n^* は予め定められた最初の権利行使可能時刻である。もし、債券の発行者と保有者のどちらか一方、もしくは両者が、ある権利行使可能時刻 n で権利を行使すれば、債券の保有者はつぎのクーポン払い時刻 $n+1$ に発行者から対応する利得を受け取る。

さらに行使価格をつぎのように定義する。コール価格 $C(n, i, j)$ は、時刻 n 、ハザードレートの状態 i 、金利の状態 j のノードで、債券の発行者が行使した場合に、発行者が保有者に支払う価格である。一方、プット価格 $P(n, i, j)$ は、ノード (n, i, j) で債券の保有者が行使した場合に、発行者が保有者に支払う価格である。一般に、 $P(n, i, j) \leq C(n, i, j)$ が成り立つ。さらに、債券の保有者と発行者が、ノード (n, i, j) で同時に行使した場合、保有者に支払われる価格を $\varphi(n, i, j)$ とする。ただし、

$$P(n, i, j) \leq \varphi(n, i, j) \leq C(n, i, j) \quad n = n^*, n^* + 1, \dots, N-1, \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (10)$$

を仮定する.

3.2 確率ゲームによるアプローチ

本節では, 上記のゲーム・オプション債の価格評価問題を, 債券の保有者と発行者をゲームのプレイヤーとする, 2 人ゼロ和確率ゲームもしくは Markov ゲームとして定式化する ([2], [11]).

権利行使可能なノード (n, i, j) ($n \in \{n^*, n^* + 1, \dots, N-1\}$) において, 債券の保有者が取る純粋戦略 (行動) を $x \in S$, 発行者が取る純粋戦略 (行動) を $y \in S$, ただし $S := \{\text{権利を行使する (E)}, \text{権利を行使しない (N)}\}$ とする. ノード (n, i, j) で純粋戦略の組 (x, y) が選ばれるとき, 債券の発行者から保有者へ支払われる利得関数を $A(x, y; n, i, j)$ とする. もし権利行使可能なノード (n, i, j) 上で権利行使された場合, 債券の保有者は, 2 人のプレイヤーの行動に依存して決まるつぎの利得:

$$A(x, y; n, i, j) = \begin{cases} C(n, i, j) + c, & \text{発行者のみが権利行使;} \\ P(n, i, j) + c, & \text{保有者のみが権利行使;} \\ \varphi(n, i, j) + c, & \text{両者が同時に権利行使} \end{cases}$$

を, つぎのクーポン時刻 $n+1$ に債券の発行者から受け取る. ここで, c は債券の (固定) クーポンを表す (ただし, ノード (n, i, j) に依存する変動クーポン $c(n, i, j)$ としても, 以降の分析・計算上, 何ら差し支えはない). もし, いずれのプレイヤーも権利行使しなければ, ゲームはつぎの時刻 $n+1$ へと進行する. 金利と信用リスクの 1 期間相関係数を ρ とすれば, リスク中立確率測度のもとで, 時刻 $n+1$ では, 以下の 4 つの状態:

$$(n+1, I_{n+1}, J_{n+1}) = \begin{cases} (n+1, i, j), & \text{確率 } \frac{1+\rho}{4}; \\ (n+1, i+1, j), & \text{確率 } \frac{1-\rho}{4}; \\ (n+1, i, j+1), & \text{確率 } \frac{1-\rho}{4}; \\ (n+1, i+1, j+1), & \text{確率 } \frac{1+\rho}{4} \end{cases}$$

へと推移する. ただし, I_{n+1} と J_{n+1} はつぎの時刻 $n+1$ でのランダムな信用リスクの状態と金利の状態をあらわす. 一方, もし 1 期間 $[n, n+1]$ の間に発行体がデフォルトを起こした場合, 債券の保有者には元本の一部が返ってくるものとする.

これより, 債券の保有者と発行者は, ノード (n, i, j) ($n \in n^*, n^* + 1, \dots, N-1$) 上で, その利得と状態推移の構造が, 金利市場と発行者の信用リスク, さらに 2 人のプレイヤーの戦略 (行動) に依存する, 2 人ゼロ和のステージ・ゲームに直面していると考えられる. このとき, 権利行使可能な各ノードで定義されるステージ・ゲームにおいて, 債券の保有者は利得を最大化, 債券の発行者は利得を最小化するように行動を選択し, それらの行動選択の規則は, それぞれのプレイヤーの権利行使戦略を構成する.

さて, 一般に, 利得行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m, n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$) で定義される 2 人ゼロ和ゲーム (行列ゲーム) が与えられるとき, ゲームの値を,

$$val[A] := \min_{q \in \Delta^n} \max_{p \in \Delta^m} p^\top A q = \max_{p \in \Delta^m} \min_{q \in \Delta^n} p^\top A q \quad (11)$$

によって定義する. 上式の 2 番目の等号は, von Neumann のミニ・マックス定理による. ここで, p は行プレイヤーの混合戦略をあらわす m -次元ベクトル, q は列プレイヤーの混合戦略をあらわす n -次元ベクトル, Δ^m, Δ^n は, それぞれのプレイヤーの全ての混合戦略の集合をあらわす.

このとき、ノード (n, i, j) におけるゲーム・オプション債の値を $V(n, i, j)$ とすると、この確率ゲームの解は、動的計画法の最適性の原理にしたがって、つぎの最適性方程式を、時間に関してバックワードに解くことにより求めることができる。

最適性方程式.

$$V(N, i, j) = F \cdot S(N, i; 1) + F \{1 - S(N, i; 1)\} R, \\ n = N, \quad i, j = 0, 1, \dots, n; \quad (12)$$

$$V(n, i, j) = d(n, i, j; 1) \left\{ \text{val} \begin{bmatrix} \varphi(n, i, j) & P(n, i, j) \\ C(n, i, j) & \mathbb{E}^Q[V(n+1, I_{n+1}, J_{n+1})|(n, i, j)] \end{bmatrix} + c \right\} \\ + F \{1 - S(n, i; 1)\} R, \\ n = N-1, N-2, \dots, n^*, \quad i, j = 0, 1, \dots, n; \quad (13)$$

$$V(n, i, j) = d(n, i, j; 1) \left\{ \mathbb{E}^Q[V(n+1, I_{n+1}, J_{n+1})|(n, i, j)] + c \right\} + F \{1 - S(n, i; 1)\} R, \\ n = n^*-1, n^*-2, \dots, 0, \quad i, j = 0, 1, \dots, n. \quad (14)$$

ここで、 F は債券の元本、 R は債券の回収率、 $S(n, i; 1)$ は債券の発行体が 1 期間 $[n, n+1]$ に生存する確率、 $d(n, i, j; 1)$ はノード (n, i, j) での金利リスクと信用リスクを統合した 1 期間割引因子、 \mathbb{Q} はモデルにおけるリスク中立確率測度、 $\mathbb{E}^Q[\cdot|(n, i, j)]$ はリスク中立確率測度下でノード (n, i, j) を条件とする期待値演算子をあらわす。

これより、権利行使可能なノード (n, i, j) での 2 人のプレイヤーの行動選択の問題は、(13) 式内に現れる 2 人ゼロ和ゲーム (行列ゲーム):

$$\begin{bmatrix} \varphi(n, i, j) & P(n, i, j) \\ C(n, i, j) & \mathbb{E}^Q[V(n+1, I_{n+1}, J_{n+1})|(n, i, j)] \end{bmatrix} \quad (15)$$

を解く問題に帰着される。ここで、債券の保有者は利得最大化を行うので行プレイヤー、債券の発行者は利得最小化を行うので列プレイヤーとする。

以上から、ゲーム・オプション債の価格評価のための確率ゲームは、満期時刻 $n = N$ から初期時刻 $n = 0$ まで、時刻 n に関してバックワードに、最適性方程式 (12)–(14) に現れるステージ・ゲーム (15) を効率的に解くことができれば、全体ゲームを解くことができ、終には初期時刻でのゲーム・オプション債の無裁定価格と、債券の保有者と発行者の最適行使戦略を同時に導くことができる。

つぎに、権利行使可能な各ノード上でのステージ・ゲームにおける均衡戦略プロファイルを示す。一般に、2 人ゼロ和ゲームの鞍点均衡 (ミニ・マックス均衡) は、純粋戦略を含む混合戦略の中に存在することが知られている。しかし、以下の定理は、この確率ゲームが常に純粋戦略のなかにその鞍点均衡が存在することを示している。

定理. 権利行使可能なノード (n, i, j) ($n \in \{n^*, n^*+1, \dots, N-1\}$) において、 $P(n, i, j) < C(n, i, j)$ を仮定する。このとき、このノードでプレイされる行列ステージ・ゲームは、純粋戦略の中に鞍点をもつ、すなわち、

$$\max_{x \in S} \min_{y \in S} \mathcal{A}(x, y; n, i, j) = \min_{y \in S} \max_{x \in S} \mathcal{A}(x, y; n, i, j).$$

さらに、この行列ステージ・ゲームにおける均衡戦略プロファイル (x, y) は

$$\begin{cases} (E, N), & \mathbb{E}^Q[V(n+1, I_{n+1}, J_{n+1})|(n, i, j)] \leq P(n, i, j) < C(n, i, j); \\ (N, N), & P(n, i, j) < \mathbb{E}^Q[V(n+1, I_{n+1}, J_{n+1})|(n, i, j)] < C(n, i, j); \\ (N, E), & P(n, i, j) < C(n, i, j) \leq \mathbb{E}^Q[V(n+1, I_{n+1}, J_{n+1})|(n, i, j)], \end{cases}$$

で与えられる。ここで、 E と N は、それぞれ、権利行使する (Exercise)、権利行使しない (Not Exercise) という純粋戦略を表す。□

上の定理では、 $P(n, i, j) < C(n, i, j)$ を仮定したが、 $P(n, i, j) = C(n, i, j)$ の場合は、両プレイヤーが同時に行使することが最適となり得る。したがって、この場合は、均衡戦略プロファイルが $(x, y) = (E, E)$ となる可能性がある。

いずれにせよ、これらの結果から、解くべき確率ゲームでは、純粋戦略のみを考えておけば十分であることが分かる。

4 数値例

本節では、上記の議論にもとづきゲーム・オプション債の価格評価を行い、その数値計算例を示す。

パラメータ設定として、債券の満期を 10 年、5 年目以降に権利行使が可能、債券の元本を $F = 1$ 、クーポンを $c = 0.06$ 、ステップ・サイズを $\Delta t = 0.25$ 、デフォルト時の債券の回収率を $R = 0.4$ とする。イールド・カーブは $r(n) = 0.05$ 、金利ボラティリティは $\sigma^r(n) = 0.05$ 、ハザード・カーブは $h(n) = 0.01$ 、ハザード・レート・ボラティリティは $\sigma^h(n) = 0.1$ とし、簡単化のため、金利リスクと信用リスクは独立 ($\rho = 0$) と仮定する。さらに、コール価格は $C(n, i, j) = 1.01$ 、プット価格は $P(n, i, j) = 0.99$ で与える。

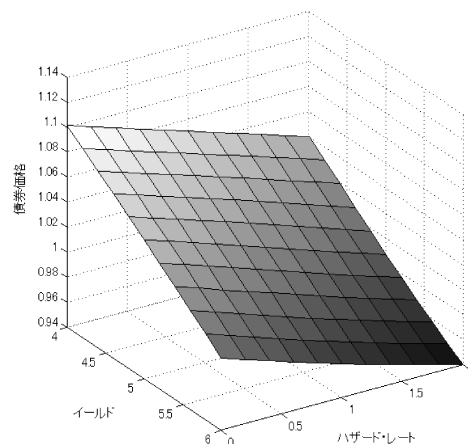


図1 ゲーム・オプション債価格

図1は、イールド・カーブとハザード・カーブを変化させたときの、ゲーム・オプション債価格を示している。この図では、イールド・カーブは4%から6%まで、ハザード・カーブは0%から2%まで並行シフトさせた。この図から、イールド・カーブとハザード・カーブの上昇は、ともにゲーム・オプション債価格を低下させることが分かる。金利の上昇や信用リスクが増大すれば債券価格が低下するという結果は、我々の直感と整合的である。

つぎに、イールド・カーブとハザード・カーブの変化にもとづく債券の価格変動リスクを考える。本稿では、イールド・カーブとハザード・カーブの各年限ごとの微小変化に対して、債券の価格感応度を分析するため、キー・レート・デュレーションとクレジット・キー・レート・デュレーションを用いる([3])。キー・レートと

は、ある債券の初期時刻から満期時刻までの範囲のうち、イールド・カーブもしくはハザード・カーブの変化について、特に着目したい年限の利回りをさす。キー・レート・デュレーションもしくはクレジット・キー・レート・デュレーションは、それぞれのキー・レートをシフトさせたときの、債券の価格感応度を測定する。それぞれのキー・レート・デュレーション（クレジット・キー・レート・デュレーション）の和は、デュレーション（クレジット・デュレーション）に一致する。本稿では、3 か月、1, 2, 3, 5, 7, 10 年の 7 つのキー・レートを考え、それぞれ 0.1 % シフトさせた。比較のため、クーポン債、コーラブル債、プッタブル債、ゲーム・オプション債の 4 種の債券への計算を行った。

	0.25	1	Key Year				10	デュレーション
			2	3	5	7		
クーポン債	0.013	0.055	0.110	0.253	0.458	0.730	5.839	7.458
コーラブル債	0.013	0.056	0.111	0.256	2.118	1.149	2.930	6.633
プッタブル債	0.013	0.055	0.110	0.253	0.887	0.869	4.092	6.279
ゲーム・オプション債	0.013	0.055	0.111	0.256	2.564	1.265	1.193	5.457

表1 キー・レート・デュレーション

	0.25	1	Key Year				10	クレジット デュレーション
			2	3	5	7		
クーポン債	0.160	0.034	0.068	0.156	0.281	0.448	3.459	4.605
コーラブル債	0.159	0.034	0.068	0.151	1.405	0.439	1.561	3.818
プッタブル債	0.160	0.034	0.067	0.157	0.561	0.506	2.569	4.056
ゲーム・オプション債	0.160	0.034	0.068	0.153	1.694	0.487	0.682	3.278

表2 クレジット・キー・レート・デュレーション

表1と表2はそれぞれ、キー・レート・デュレーションとクレジット・キー・レート・デュレーションの4種の債券に対する結果を示している。2つの表より、クレジット・デュレーションはすべての債券について、デュレーションよりも小さな値をとる。これは、信用リスクの増加は、元本の一部の早期償還につながるため、元本と利息の平均回収期間をあらわすクレジット・デュレーションは、小さくなるからと考えられる。2つの表のキー・レートの値に着目すると、権利行使可能時刻以前ではそれぞれのキー・レートにほとんど変化はないが、その一方、権利行使可能な5年目以降では債券によってそれぞれ異なる影響を受ける。とくに、コーラブル債とゲーム・オプション債では、イールド・カーブとハザード・カーブの5年の変化に対し、大きな価格変動リスクをもつことが分かる。

5 おわりに

本稿では、金利リスクと信用リスクを統合した2ファクター・一般化Ho-Leeモデルを使って、ゲーム・オプション債を格子上での確率ゲームとして定式化し、その無裁定価格評価を行った。さらに、キー・レート・デュレーションやクレジット・キー・レート・デュレーションの尺度を用いて、イールド・カーブとハザード・

カーブの各キー・レートの変化による債券の価格変動リスクに関して、いくつかの性質を観察した。今後は、これらの数値計算の結果を考察し、それを使ったヘッジへの応用などの分析が残された課題である。

参考文献

- [1] Ben-Ameur, H., Breton, M., Karoui, L., and L'Ecuyer, P., A Dynamic Programming Approach for Pricing Options Embedded in Bonds, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 31, pp. 2212–2233, 2007.
- [2] Filar, J. and Vrieze, K., *Competitive Markov Decision Processes*, Springer, 1997.
- [3] Ho, T. S. Y., Key Rate Durations Measures Of Interest Rate Risks, *The Journal of Fixed Income*, Vol. 2, No. 2, pp. 29–44, 1992.
- [4] Ho, T. S. Y. and Lee, S. B., Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims, *The Journal of Finance*, Vol. 41, pp. 1011–1029, 1986.
- [5] Ho, T. S. Y. and Lee, S. B., *The Oxford Guide to Financial Modeling, Applications for Capital Markets, Corporate Finance, Risk Management, and Financial Institutions*, Oxford University Press, 2004.
- [6] Ho, T. S. Y. and Lee, S. B., Generalized Ho–Lee Model: A Multi-Factor State Time Dependent Implied Volatility Function Approach, *The Journal of Fixed Income*, Vol. 17, No. 3, pp. 18–37, 2007.
- [7] Ho, T. S. Y. and Lee, S. B., A Unified Credit and Interest Rate Arbitrage-Free Contingent Claim Model, *The Journal of Fixed Income*, Vol. 18, No. 3, pp. 5–17, 2009.
- [8] Ito, D., Ohnishi, M. and Tamba, Y., Pricing and Calibration of a Chooser Flexible Cap. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, Vol. 27, No. 2, pp. 243–256, 2010
- [9] Ochiai, N. and Ohnishi, M., Pricing of the Bermudan Swaption under the Generalized Ho–Lee Model, Kyoto University, RIMS Kokyuroku, No. 1802, *Mathematical Decision Making under Uncertainty and Ambiguity, and Related Topics*, pp. 256–262, 2012.
- [10] Sato, K. and Sawaki, K., The Valuation of Callable Financial Options with Regime Switches: A Discrete-time Model, Kyoto University, RIMS Kokyuroku, No. 1818, *Financial Modeling and Analysis*, pp. 33–46, 2012.
- [11] Shapley, L. S., Stochastic Games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 39, No. 10, pp. 1095–1100, 1953.
- [12] Tamba, Y., Pricing the Bermudan Swaption with the Efficient Calibration, Nagoya University of Commerce and Business, *Journal of Economics and Information Science*, Vol. 51, Issue 1, pp. 17–31, 2006.
- [13] 落合夏海, 大西匡光., 一般化 Ho–Lee モデルに基づくゲーム・オプション債の価格評価, *オペレーションズ・リサーチ*, Vol. 60, No. 3, 2015.